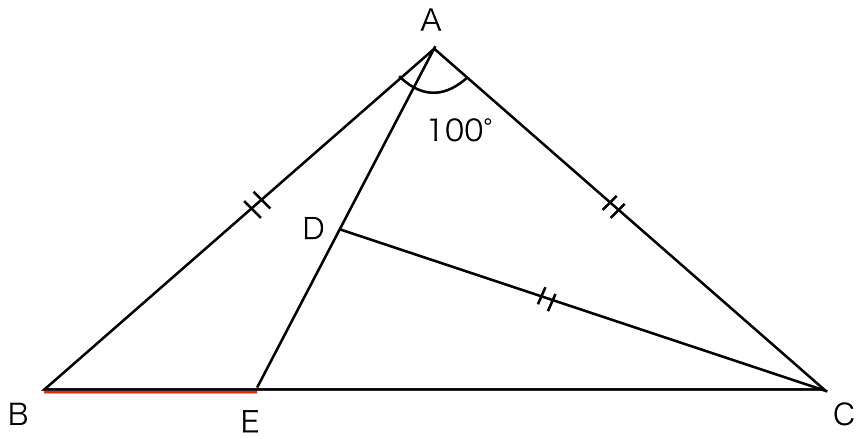
小学生が解く問題，中学入試，算数オリンピックより

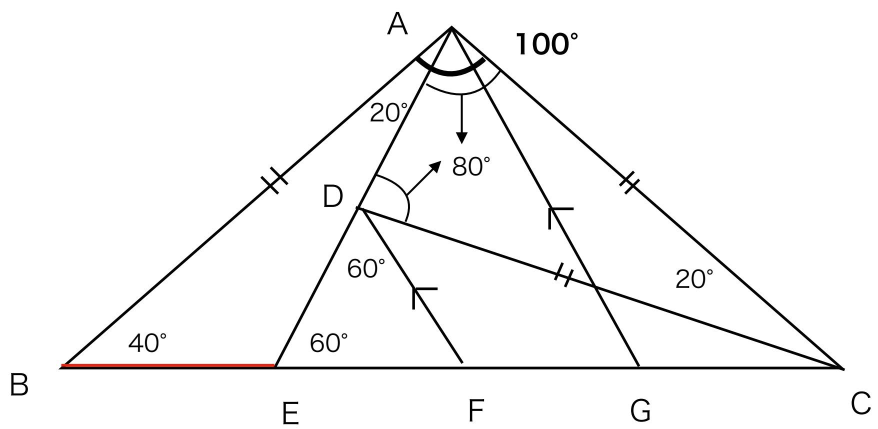
【１】線分の長さを求める問題



【問】AB=AC=CD，∠BAC＝100°で，BC−AD=5cm　のとき，BEは何cmか.

【解】題意から，∠ABC=∠ACB=40°，∠CAD=∠CDA=80°，∠BAE=∠ACD=∠DCE=20°，∠AEC=60°などが得られる.

　まず，∠EDF=60°となるBC上の点Fを取ると，△ABE≡△CDF

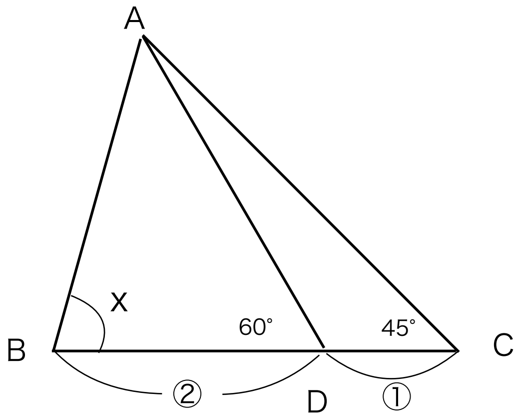


となる（一辺と両端の角がそれぞれ等しい）．ゆえに△DEFは正三角形になり，BE=DE=EFとなる．さらにAからDFに平行な直線を引き，BCとの交点をGとすれば，△ABE≡△ACGである．ゆえにBE=CG，また，AE−DE=CF−CGより AD=FG．ゆえに，BC=5+ADより，

　　　BC=BE+EF+FG+CG=3BE+AD　∴ 3BE=5，よって

$$BE=\frac{5}{3}(cm) \cdots 答$$

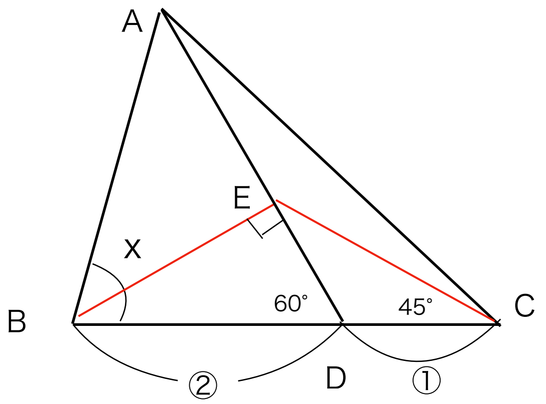
【２】角度を求める問題



【問】上の図で，∠C=45°，∠ADB=60°，辺CD：BD=１：２のとき，ｘは何度か.

【注】線分を表すCD，BD等はやむを得ない場合以外はアルファベット順にしている．合同を示すときはこの限りでない.

【解】BからADに垂線を引き，ADとの交点をEとすれば△BDEは直角三角形（正三角形の半分なのでDE=CD）になり，∠DBE=30°となるる．さらに線分CEを引けば DE=CDより∠ACE=15°，ゆえに△ACEは二等辺三角形，よって AE=CE．だから△ABEは直角二等辺三角形となる．よって∠ABE=45°，ゆえにｘ=75°．‖



さて，上記の美しい解き方はBEさえ思いつけば誰でも簡単に解を得られるが，私はこの解法をみつけるのに三日かかってしまった.

この方法が見つかる前に，実は二つの方法で解を得ていたのである．しかしそれは三角関数や平方根を用いているので「算数」とはいえない．参考までに紹介しておく.

【別解1】まず，図をできるだけ正確に書くことで x=75°と予想できる．これを目標とする．初めの図で，CD=1としておくとBC=3．△ADCの正弦定理より

$$\frac{AC}{sin120} = \frac{1}{sin15} \quad \therefore AC = \frac{\sqrt{3}}{2sin15} \cdots ①$$

次に，△ABCの正弦定理から

$$\frac{AC}{sinx} = \frac{3}{sin(135-x)} \quad \therefore AC = \frac{3sinx}{sin(135-x)} \cdots ②$$

①＝②より x を求める．実際の手順は以下の通り．まず分母を払う．

$$\sqrt{3}sin(135-x) = 6sin15sinx$$

ここで，$sin(135-x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(sinx + cosx)$ を代入して整理すると

$$sinx + cosx = 2\sqrt{6}sinx \cdot sin15$$

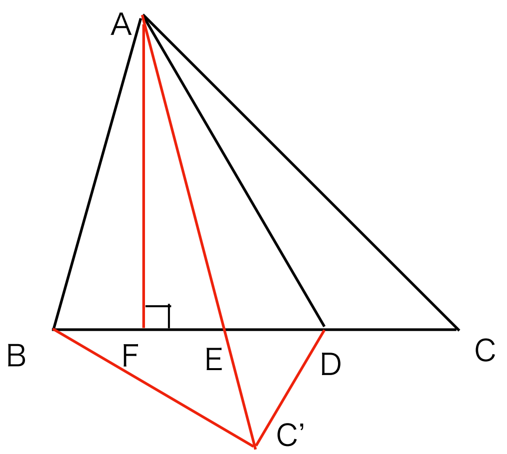
$sinx$ で割って $sin15 = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ を代入すると

$$\frac{sinx + cosx}{sinx} = 2\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \frac{6-2\sqrt{3}}{2}$$

左辺は $1 + \frac{1}{tanx}$ だから，ここから$tanx = 2+\sqrt{3}$ が出てくる．ところで $tan75 = 2+\sqrt{3}$ であるから x=75°　‖

この解き方は着眼は容易であるが計算はやや複雑だ．力仕事になる．何より小学生の範囲を超えている．

【別解２】次の解法は三角関数ではなく，正三角形の比を用いる．



図で，△ADCをADを軸に折り返したときのCの位置をC’とすると，∠CAD=15°より∠AEB=75°となる．つまり△ABEは二等辺三角形だと推測できる．そこでAか

らBCに垂線を引き，BCとの交点をFとして，BF=EFを示す．まず，CD=1としておくのは前述同様．

△BC’Dは∠C’＝90°，∠B=30°，∠D＝60°の直角三角形だからC’D：BC'＝1：$\sqrt{3}$，そしてEC’は∠C’を二等分しているからDE：BEも1：$\sqrt{3}$である．よって DE= $2\cdot\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}=\sqrt{3}-1$，そして BE=$2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=3-\sqrt{3}$.

次に，DF：AF＝DF：CF＝１：$\sqrt{3}$ より CD：DF=$(\sqrt{3}-1):1$　よってDF= $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$ となる．ゆえに

$$\text{EF=DF−DE=}\frac{\sqrt{3}+1}{2}-(\sqrt{3}-1)=\frac{3-\sqrt{3}}{2}.$$

一方，

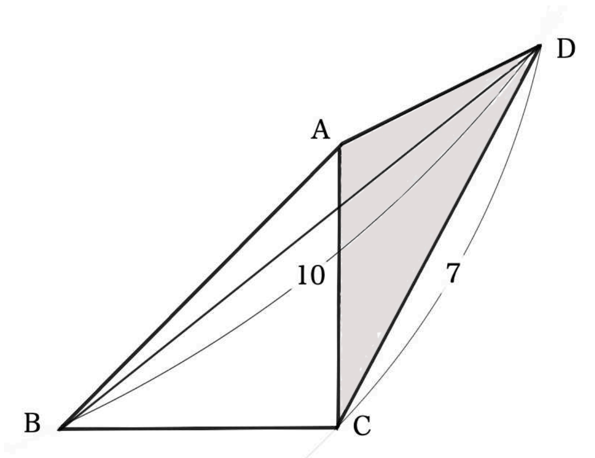
$$\text{BF=BE−BF=}3-\sqrt{3}-\frac{3-\sqrt{3}}{2}=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$$

となって BF=EF が証明された．ゆえに x=75°　‖

実は，この解き方の中で最初の（算数の）解き方に気付いたのだ．つまり，上の図で△BC’Dをさらに BCで折り返したとするとC’DがADに重なるではないか！ それはBからADに垂線を引くことである．こうして【解】に到達したのである(笑)．（2024.9.11）

次の問題もなかなか難しい。

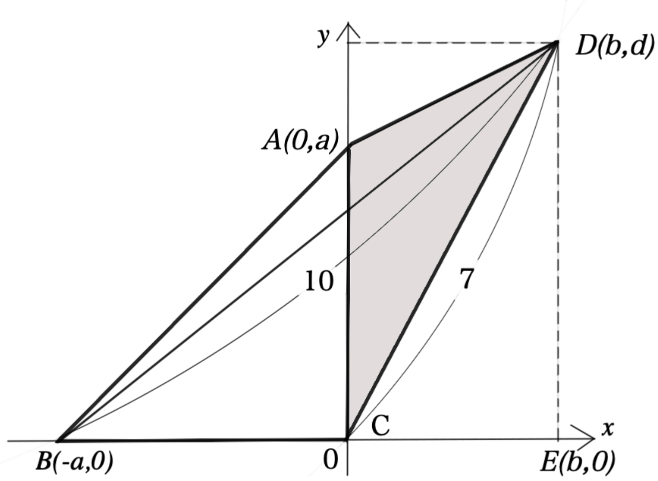
【問】図の四角形ABCDの面積は18cm²で，△ABCは∠C=90°の直角二等辺三角形，対角線BD=10cm，辺CD=7cmである．このとき△ACDの面積はいくらか．



非常に難問．算数オリンピックの面目躍如といっていい．解いた人の才能もさることながら，作問者の非凡を称えたい．

まず，私の解き方を紹介する．例によって算数の範囲を超えているが，解析幾何学の威力(?)を発揮している．

【解1】下図のように，直線BCを x 軸，直線ACを y 軸にとり，四角形ABCDの各点の座標をA(0,a)，B(−a,0)，C(0,0)，D(b,d) とし，E(b,0) とする．



図から，求める△ACDの面積は$\dfrac{1}{2}ab$ であることがわかる．

(1) △BDEより三平方の定理から $(a+b)^2+d^2=10^2$

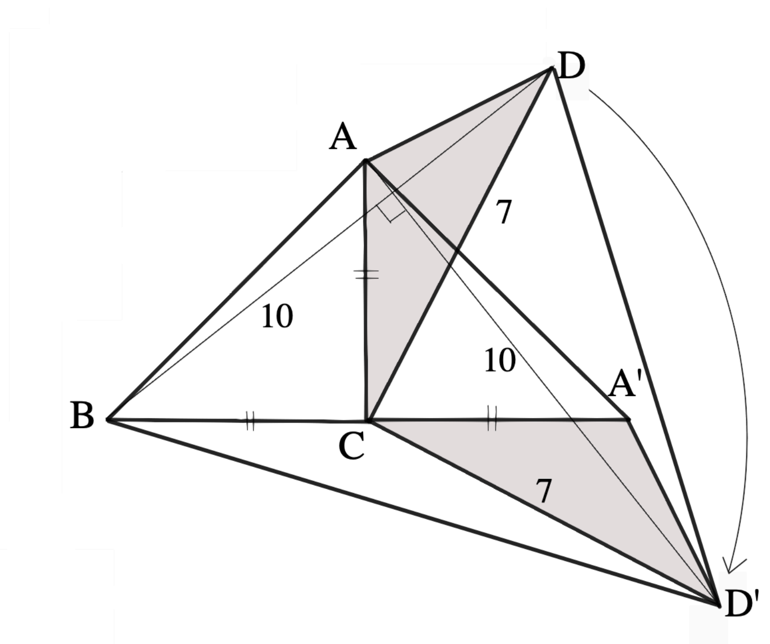
(2) 同様に△CDEより $b^2+d^2=7^2$

(3) 題意より $\dfrac{1}{2}a^2+\dfrac{1}{2}ab=18$ すなわち $a^2+ab=36$

(1) の展開式から(2)を引くと $a^2+2ab=51$．これから (3) を引けば $ab=15$ ゆえに $\dfrac{1}{2}ab=7.5(cm^2)$ …答　‖

以下は算数レベルで解く方法であるが，これを果たして「算数」といっていいか甚だ疑問である．

【解2】下図のように，△ADCをCを中心に時計回りに90度回転させ，AはA’，DはD’に移ったとする．そして新たに線分AA’，BD’，DD'を引く．



明らかに△ACD＝△A’CD’であるが，さらに△A’CD’＝△BCD’でもある（底辺と高さが同じ）．次に気付かなくてはならないのは

$$\text{四角形ABD'D}=\frac{1}{2}\times10\times10=50,\ \triangle\text{CDD'}=\frac{1}{2}\times7\times7=24.5$$

である．すなわち

四角形ABD’D＝四角形ABCD+△CDD’＋△BCD'

である．よって求める△ACDは

△ACD=△BCD’=四角形ABD’D−四角形ABCD−△CDD’

＝50−18−24.5

＝7.5(cm²)　…答　‖

△ACDの90度回転までは思いつくも，そのあとの四角形ABD’Dと△CDD’の面積まではなかなか思いつかないであろう．確かにここでBD=10cm，CD=7cm が活きてくるのであるが.

（2024.9.16）